LOS TRIANGULOS SEMEJANTES SON IGUALES EN EL PLANO HIPERBÓLICO.

Autora: Lucía Contreras Caballero. Profesora Titular Numeraria jubilada de la Universidad Autónoma de Madrid. lucia.contreras11@gmail.com

Introducción:

Triángulos semejantes son los que tienen ángulos que se pueden poner en correspondencia 1-1 de forma que sean iguales los ángulos correspondientes. En el plano euclídeo hay muchos triángulos semejantes a un triángulo dado, cuyos lados correspondientes son de distinta longitud, (p. ej. Los triángulos homotéticos a uno dado, cualquiera que sea el centro de homotecia) y por ello hay triángulos semejantes que no son superponibles (o iguales).

En este artículo se ve que en el plano hiperbólico los triángulos semejantes son iguales porque son superponibles: al superponer un par de vértices correspondientes, los lados determinados por cada par de vértices correspondientes han de coincidir.

Un modelo proyectivo del plano hiperbólico es el interior de un círculo en el que las rectas son los segmentos interiores al círculo de rectas euclídeas. Sus movimientos son las restricciones al interior del círculo de los movimientos proyectivos que dejan invariante su circunferencia exterior (una cónica) [S]. Estos movimientos transforman rectas en rectas, y por ello, puntos alineados en puntos alineados.

En este modelo las perpendiculares a una recta son las intersecciones con el interior del círculo de las rectas que pasan por el punto intersección de las tangentes al círculo en los extremos límite de la recta considerada, (contenidos en la circunferencia y puntos del infinito de la recta) [S].

Para ver que dos triángulos semejantes en el plano hiperbólico son superponibles probamos el resultado en dos pasos:

1. La suma de los ángulos de un triángulo en el plano hiperbólico es menor que dos rectos.

Demostración:

Primero observemos que ángulos opuestos por el vértice son iguales en el plano hiperbólico.

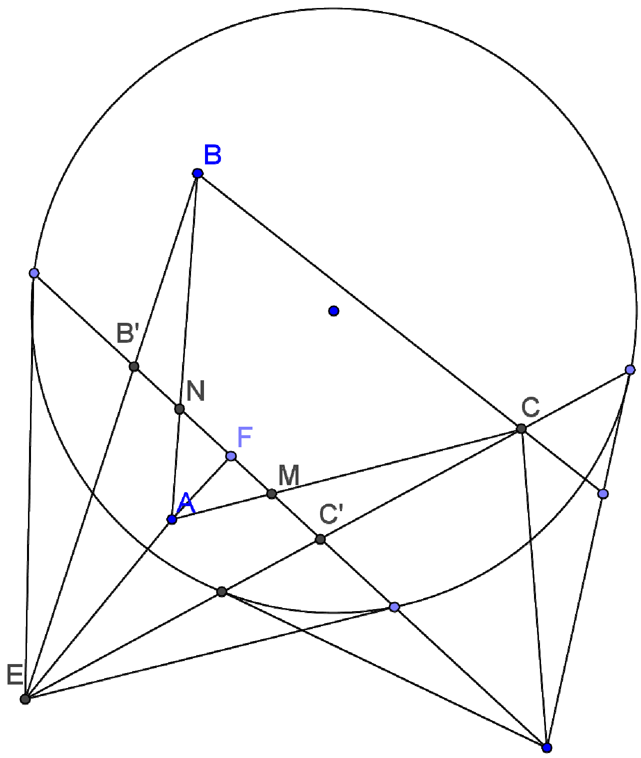
En primer lugar, los giros de centro en el centro de nuestro modelo proyectivo del plano hiperbólico dejan fija la circunferencia exterior y conservan la alineación; por ello, estos giros son movimientos hiperbólicos. Un giro de 180º alrededor del centro superpone entre sí ángulos opuestos por el vértice con vértice en dicho centro, siendo por tanto iguales.

Para ver que ángulos opuestos por el vértice con vértice en un punto distinto del centro son iguales, tenemos en cuenta que el plano hiperbólico es un espacio homogéneo, (porque cumple los cuatro primeros postulados de Euclides o por el teorema 11 del capítulo 20 de [S]) y por ello, siempre existe un movimiento del plano hiperbólico que lleva el vértice de los ángulos al centro del círculo. Como el movimiento transforma también puntos alineados en puntos alineados, transforma ángulos opuestos por el vértice en ángulos opuestos por el vértice, que si son iguales después de la transformación, lo son también antes de dicha transformación, siendo superponibles.

Ahora, para el paso 1. hacemos las siguientes consideraciones: en el triángulo ABC (figura 1) del plano hiperbólico, consideramos los puntos medios N y M de los lados AB Y AC respectivamente; N y M determinan una recta en la que designamos B′, F y C′ las intersecciones de las perpendiculares a dicha recta por los puntos B, A y C. Así obtenemos los triángulos FNA, FMA, B′NB, y C′MC.

Los dos triángulos FNA, B′NB tienen iguales los ángulos ANF y BNB′, por ser opuestos por el vértice, también los lados AN y BN por ser N el punto medio de AB y también iguales los ángulos rectos en B′ y en F. Por eso los triángulos FNA, B′NB son superponibles o iguales siendo AF=BB′. Análogamente ocurre con los dos triángulos FMA, C′MC, siendo CC′=AF. Por eso son iguales los lados BB′ y CC′, ya que los dos son iguales a AF.

figura 1



Al superponer FNA y B'NB dejando N fijo se tiene que el ángulo FAN es igual al ángulo B'BN y al superponer FMA y C'MC se tiene que el ángulo MA F es igual al ángulo MCC'

Entonces, la suma de los ángulos del triángulo ABC que es la suma de sus tres ángulos, al haber descompuesto el ángulo en A en dos sumandos es igual a la suma de los ángulos B'BC+BCC'. En efecto,

MAN+NBC+BCM=MAF+FAN+NBC+BCM=
=MCC'+B'BN+NBC+BCM=
(BCM+MCC')+(B'BN+NBC)=BCC'+B'BC.

Es decir, es igual a la suma de los ángulos no rectos del cuadrilátero BB'C'C que tiene iguales los dos lados perpendiculares a la base, (un cuadrilátero de Saccheri).

Veamos ahora que cada ángulo no recto del cuadrilátero de Saccheri es menor que un recto.

Extrayendo el cuadrilátero de Saccheri del dibujo anterior en la figura 2 y trazando la perpendicular a C′C por su extremo C vemos que el ángulo C′CB es menor que el ángulo C′CJ′ que es recto. Lo mismo ocurre con B′BC respecto a B′BJ′ que también es recto.

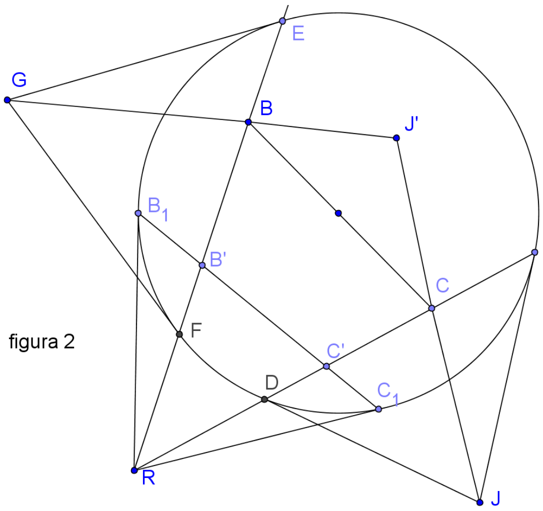


figura 2

Entonces, la suma de los ángulos del triángulo, igual a la suma de los dos ángulos no rectos del cuadrilátero de Saccheri, es menor que dos rectos, como queríamos al principio.

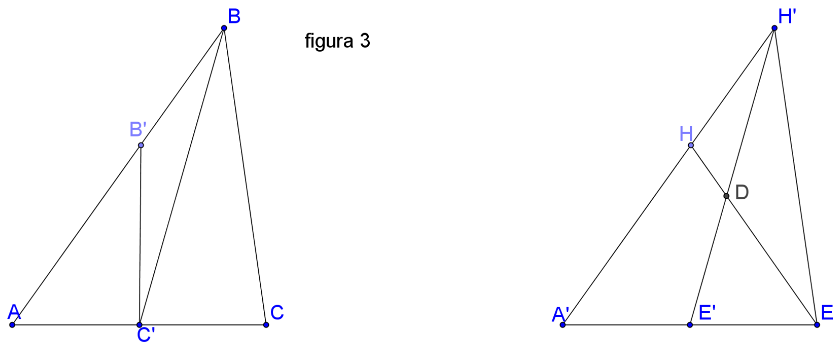
Y ahora, llegamos al resultado:

2. En el plano hiperbólico, triángulos que tienen ángulos correspondientes iguales son superponibles: iguales.

Demostración:

Consideremos dos triángulos ABC y A′B′C′, cuyos ángulos correspondientes son iguales. (ángulo en A igual a ángulo en A′, ángulo en B igual a ángulo en B′, ángulo en C igual a ángulo en C′).

Superponemos los ángulos A y A′ quedando B y B′ en el mismo lado del ángulo y por el otro lado C y C′; y suponemos que los segmentos BB′ y CC′ no se cortan (figura 3).



Si no se cortan, CBB′C′ es un cuadrilátero que se puede descomponer en dos triángulos siendo por tanto, según el resultado anterior, la suma de sus ángulos menor que cuatro rectos. Pero por otra parte, como se ve en el dibujo,

C′B′B+B′BC+BCC′+CC′B′=
2R-AB′C′+B′BC+BCC′+2R-B′C′A=4R

Porque B′BC=ABC (ver el dibujo)=A′B′C′ (por ser iguales ángulos correspondientes, por hipótesis)=AB′C′ (por haber hecho coincidir A y A′) y de la misma forma, BCC′=BCA (ver el dibujo)=B′C′A′ (por ser iguales ángulos correspondientes, por hipótesis)=B′C′A (por haber hecho coincidir A y A′).

De esta contradicción deducimos que los puntos B, B′ por un lado han de coincidir y los puntos C,C´ por otro lado han de coincidir si BB´ y CC′ no se cortaran. En este caso, por tanto, los triángulos son superponibles.

Consideremos ahora los triángulos AHE y A′H′E′ cuyos ángulos correspondientes son iguales y superpongamos los ángulos A y A′ de forma que H y H′ queden en el mismo lado del ángulo, E y E′ queden en el otro lado pero los segmentos HE y H′E′ se cortan en el punto D, (figura 3).

Consideremos entonces la suma de los ángulos de los triángulos HH′D y EE′D y encontremos una contradicción:
la suma de los ángulos de los dos triángulos HH′D y EE′D es:

DHH′+HH′D+H′DH+DEE′+EE′D+E′DE

Y sería menor que 4R por ser la suma de los ángulos de dos triángulos en el plano hiperbólico y ser la suma de ángulos de cada triángulo menor que dos rectos en dicho plano.

Pero por otra parte, esta suma es

DHH'+HH'D+H'DH+DEE'+EE'D+E'DE=
2R-A'HD+HH'D+H'DH+DEE'+2R-DE'A'+E'DE=
4R+H'DH+E'DE+(HH'D-A'HD)+(DEE'-DE'A')>4R.

mayor que cuatro rectos porque por ser H'DH=E'DE del mismo signo y mayores que cero ya que HE y H'E' se cortan en D, y ser los paréntesis son nulos, según vemos después, por lo que la expresión total es mayor que cuatro rectos, llegándose a una contradicción.

En efecto, para ver que los paréntesis son nulos tenemos: HH'D=A'H'E' (ver el dibujo) y A'H'E'= AHE, (por ser iguales ángulos correspondientes por hipótesis) y AHE=A'HE (por coincidir A y A') y A'HE=A'HD (ver el dibujo), por tanto HH'D=A'HD. Lo mismo ocurre con los ángulos DEE' y DE'A': DE'A'=H'E'A' (ver el dibujo), H'E'A'=HEA (por ser iguales ángulos correspondientes, por hipótesis) y HEA=HEA' (por coincidir A=A') y HEA'=DEE' (ver el dibujo), por tanto DE'A'=DEE'. Por lo que los paréntesis son nulos.

De esta contradicción deducimos que los puntos H y H´, por un lado, deberían de coincidir y que los puntos E y E', por otro lado, también deberían de coincidir si HE y H'E' se cortaran.

Teniéndose en los dos casos que los triángulos semejantes son superponibles o iguales.

REFERENCIAS.

[S] SANTALO, L. A. Geometría Proyectiva, EUDEBA, 1977.

[S'] SANTALO, L. A. Geometría no Euclídea, EUDEBA, 1961.